

动态采样输出调节: 切换自适应方法^{*}

黄亚欣¹ 刘允刚¹ 张纪峰^{2,3}

(1. 山东大学控制科学与工程学院, 济南 250061; 2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;
3. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049)

摘要 文章研究了自适应采样输出调节问题. 由于涉及的干扰对系统的影响显著且作用持续, 致使传统的周期采样策略不再有效, 所以文章采用了一种基于切换机制的变周期采样策略. 其特点是在大幅度降低采样频率的同时能保证反馈补偿所需的信息量, 但分析设计比较复杂和困难. 基于该切换机制和内模原理, 设计了新型的变周期动态采样控制器, 使得调节输出最终收敛到任意预先设定的零点的邻域, 同时采样周期经过有限次切换之后保持不变. 数值仿真验证了所提出的自适应采样策略的有效性.

关键词 输出调节, 采样控制, 变采样周期, 动态反馈, 切换自适应.

MR(2000) 主题分类号 93C05, 93C40, 93C57

Dynamic Sampled-Data Output Regulation: A Switching Adaptive Approach

HUANG Yaxin¹ LIU Yungang¹ ZHANG Jifeng^{2,3}

(1. *School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061*; 2. *Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190*; 3. *School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049*)

Abstract This paper addresses adaptive sampled-data output regulation. The disturbance concerned has a significant and persistent effect on the system involved. This makes the classical schemes inapplicable and forces us to employ a switching scheme which can essentially reduce the sampling rate while satisfy the information requirement of the feedback compensation, but is quite complex and difficult to synthesize. Based on this and by internal model principle, a new dynamic sampled-data controller with the variable sampling periods is proposed, which guarantees the regulated output to ultimately converge to an arbitrary pre-specified neighborhood of the origin while the sampling periods remain unchanged after a finite number of switchings.

^{*} 国家自然科学基金 (61873146, 61877057) 资助课题.

收稿日期: 2018-12-22.

客座编委: 黄一.

A numerical simulation is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed adaptive sampled-data scheme.

Keywords Output regulation, sampled-data control, variable sampling periods, dynamic feedback, switching adaptive.

1 引言

随着计算机和网络技术在控制系统中的普及, 采样控制变得越来越重要并得到广泛关注^[1-3]. 不同于连续时间控制, 采样控制断续地(周期地)进行系统或控制信号的传感、计算、传输和执行^[4-11]. 但是, 由于采样/执行区间内系统信息的缺失, 不确定性/非线性对采样控制的影响更加严重(较连续时间控制).

对于具有严重不确定性(特别是加性)的系统, 固定周期的传统采样策略通常无效, 所以应寻求变周期的采样策略, 但其分析设计相对复杂困难^[5]. 特别地, 文献[5, 12]引入了变采样率的自适应调节机制以补偿系统中的严重不确定性, 但该机制仅能处理乘性不确定性/干扰(其影响随着系统状态收敛到零而不断衰退), 而不能处理加性不确定性/干扰(其影响显著且持续). 尽管文献[13-19]考虑了具有加性干扰的情形, 但仅建立了系统状态与加性干扰之间的 ISS/ISpS/ $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_p$ 等关系, 没有给出加性干扰的补偿机制进而给出采样(或事件触发)干扰抑制控制策略. 文[20]虽然实现了事件触发干扰抑制控制, 但仅研究了控制输入与加性干扰相匹配的情形.

本文旨在针对具有加性干扰的系统, 发展新型的自适应采样控制策略. 因为干扰是由中立稳定的某外部系统生成(初值未知), 其影响显著且持续, 故不能采用传统的周期采样策略. 受文献[21, 22]启发, 本文将引入一个强有力的切换机制, 用于调节采样周期以确保反馈补偿所需的信息量. 进而基于内模原理, 设计新型的变周期动态采样控制器, 确保调节输出最终收敛到任意预先设定的零点的邻域, 同时确保采样周期经过有限次切换之后保持不变. 值得指出的是, 所设计的采样控制器能在时间足够大后保持任意预先给定的精度, 而不是仅在(足够大的)采样时刻满足精度要求^[12-15].

本文结构如下: 第2节中, 基于切换调节机制设计了新型的动态采样控制器, 实现了采样输出调节控制目标, 其中两个重要命题的详细证明在第3节给出. 第4节提供了一个仿真算例; 第5节是本文的结论.

2 自适应采样输出调节

本节提出了基于切换调节机制的新型动态采样控制器以实现输出调节, 其中切换机制用于调节变采样周期以确保反馈补偿所需的信息量. 此外, 本节严格证明了该控制器确保采样周期经过有限次切换之后保持不变, 并确保调节输出最终收敛到任意预先设定的零点的邻域.

2.1 系统模型和控制目标

考虑如下受扰系统的采样输出调节

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ev, \\ e = Cx + Fv, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态, 初始值 $x(t_0) = x_0$; $u \in \mathbf{R}^m$ 和 $e \in \mathbf{R}^p$ 分别是系统输入和调节输出; $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 且 $\text{rank} B = m$, $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$, $E \in \mathbf{R}^{n \times l}$, $F \in \mathbf{R}^{p \times l}$; $v \in \mathbf{R}^l$ 是满足如下外部系统的未知干扰

$$\dot{v} = A_v v, \quad (2.2)$$

其初始值 $v(t_0) = v_0$ 未知, 且矩阵 $A_v \in \mathbf{R}^{l \times l}$ 是中立稳定的, 即 A_v 的特征值互异并均有零实部. 此外, 系统 (2.1) 及外部系统 (2.2) 还满足如下假设

假设 2.1 (A, B) 是可镇定的, 即, $\text{rank}[\lambda I_n - A, B] = n, \forall \lambda \in \mathbf{C}^+$.

假设 2.2 对于 A_v 的任意特征值 λ , 有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I_n & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p.$$

关于系统 (2.1), 尽管已有采样 (或事件触发) 控制设计方面的研究^[13-20, 23]. 但是, 文 [23] 要求外部信号 v 可用于反馈, 文 [13-19] 仅建立了系统状态和外部信号 v 之间 ISS/ISpS/ $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_p$ 等关系, 文 [20] 仅研究了控制输入与加性干扰相匹配的情形. 值得指出的是, 当 $C = I_n$, $F = 0$ 和 $\text{rank} B = m = n$ 时, 假设 2.1 和 2.2 必然成立, 本文的采样输出调节则退化为文献 [24] 中的采样镇定和干扰抑制.

具体地, 本文的控制目标是对满足假设 2.1 和 2.2 的系统 (2.1) 和外部系统 (2.2), 设计一个基于逻辑切换的变周期动态采样控制器, 以实现输出调节: 闭环系统的所有信号在 $[t_0, +\infty)$ 上有界, 并且 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| < \varepsilon$, 其中 ε 表示预先设定的最终精度.

与相关文献 [12-19] 相比, 设计的采样控制器在干扰抑制和精度实现两个方面有明显优势: 1) 与 [13-19] 不同, 本文设计的采样控制器中引入了加性干扰的补偿机制. 考虑到外部系统 (2.2) 生成的干扰对系统 (2.1) 影响显著且持续, 因此引入强有力的逻辑切换补偿机制. 2) 本文设计的采样控制器能在时间足够大后保持任意预先给定的精度, 而不是仅在 (足够大的) 采样时刻满足精度要求^[12-15].

2.2 采样控制器设计

受文献 [24] 的启发, 针对系统 (2.1) 设计如下动态采样控制器

$$\begin{cases} u(t) = K_1 z(t_k) + K_2 x(t_k), \\ \dot{z}(t) = G_1 z(t) + G_2 e(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 $z \in \mathbf{R}^{pl}$ 的引入主要用于补偿由 (2.2) 式生成的外部干扰, 初始值 $z(t_0) = z_0$; 采样时刻 t_k 通过变采样周期 $h_k = t_{k+1} - t_k, k = 0, 1, \dots$ 的切换调节机制 (见下文) 确定.

选择矩阵 K_1, K_2, G_1 和 G_2 使得 $A_c = \begin{bmatrix} A+BK_2 & BK_1 \\ G_2 C & G_1 \end{bmatrix}$ 是 Hurwitz 的, 且如下方程存在一个解 X_c :

$$\begin{cases} X_c A_v = A_c X_c + B_c, \\ C_c X_c + F = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

其中 $B_c = [E^T, F^T G_2^T]^T$ 和 $C_c = [C, 0]$.

对于 (2.3) 式中的 K_1, K_2, G_1 和 G_2 , 可根据文献 [25] 中的方法来选取 (文献 [25] 中 21 页的注 1.23). 首先, 选取 G_1 为 n -块对角阵, 其中每块均是 A_v 的可控标准型; 选取 $G_2 \in \mathbf{R}^{(pl) \times p}$ 中的第 il 行第 i 列的元素是 1, 其他元素是 0. 然后, 选取 K_1 和 K_2 使得 A_c 是 Hurwitz 的. 由假设 2.1 和 2.2 以及文献 [25] 中 22 页的引理 1.26 可知, 上述 K_1 和 K_2 必然存在. 进而, 根据文献 [25] 中的引理 1.27 可知, 如此选取的 G_1, G_2, K_1 和 K_2 可确保 (2.4) 式存在解 X_c .

通过如下切换逻辑 (用于调节 h_k) 来确定控制器 (2.3) 中的采样时刻 t_k :

切换逻辑 1 变采样周期 h_k 的调节机制

(i) 初始化令 t_0 和 $t_1 = t_0 + h_0$ 是前两个采样时刻, 第一个采样周期 h_0 满足

$$h_0 < \frac{1}{2 \left((\|A\| + \|BK_1\| + \|BK_2\|) \|PD_c\| + (\|G_1\| + \|G_2 C_c\|) \|PG_c\| \right)} =: \frac{1}{\mu}, \quad (2.5)$$

其中 $D_c = [K_2^T B^T, C^T G_2^T]^T$, $G_c = [K_1^T B^T, 0]^T$, P 是满足 $A_c^T P + P A_c \leq -I_{n+pl}$ 的正定对称矩阵. 选取 $H = \{\bar{h}_k : j = 1, 2, \dots\}$ 为一个严格减的正序列, 且满足 $\bar{h}_k < h_0$, $\lim_{j \rightarrow +\infty} \bar{h}_k = 0$, $\sum_{j=1}^{+\infty} \bar{h}_k = +\infty$ (显然, H 可以选为 $\{\frac{1}{j+1} h_0 : j = 1, 2, \dots\}$).

(ii) 切换逻辑 采样时刻 $t_{k+1} = t_k + h_k$, $k = 1, 2, \dots$, 其中变采样周期 h_k 通过如下方式迭代生成,

$$h_k = \begin{cases} h_{k-1}, & \text{若 } \|e(t)\| < \varepsilon, \forall t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \max \{h \in H \mid h < h_{k-1}\}, & \text{否则.} \end{cases}$$

考虑到由式 (2.1), (2.2) 和 (2.3) 组成的闭环系统在每一个 $[t_k, t_{k+1})$ 上的线性特性, 因此闭环系统的解在 $[t_k, t_{k+1})$ 上唯一且不逃逸. 另外, 注意到 $\sum_{j=1}^{+\infty} \bar{h}_k = +\infty$, 那么采样周期不会在有限时间内发生无限次切换. 综上可得, 对于任意初始值, 闭环系统在 $[t_0, +\infty)$ 上有唯一解.

采用变周期 (采样周期由切换逻辑 1 决定) 采样策略的原因可以归结为两方面: 一方面, 外部系统 (2.2) (用于生成干扰 v) 的初始值未知导致不能提前获取采样周期, 因此不能采用传统固定周期采样策略; 另一方面, 通过自适应调节采样周期可保证反馈补偿所需的信息量. 值得指出的是, 采样周期经过有限次切换之后将保持不变 (详见定理 2.1 的证明), 这说明变周期采样控制将最终变成固定周期采样控制.

2.3 稳定性分析

本小节总结了自适应输出调节的主要结果, 并分析了由式 (2.1), (2.2) 和 (2.3) 组成的闭环系统的有界性和收敛性.

令 $\xi = [x^T, z^T]^T$, 那么由式 (2.1) 和 (2.3) 可得

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A_c \xi(t) + B_c v(t) + D_c (x(t_k) - x(t)) + G_c (z(t_k) - z(t)) + F_c (v(t_k) - v(t)), \\ e(t) = C_c \xi(t) + F v(t), \end{cases} \quad (2.6)$$

其中 A_c, B_c, C_c, D_c, G_c 已由 (2.4) 式及切换逻辑 1 给出, 且 $F_c = [0, F^T G_2^T]^T$. 进一步, 令

$\bar{\xi} = \xi - X_c v$, 并注意到 (2.2) 式和 (2.4) 式中第一个等式, 可以得出对任意的 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 有

$$\dot{\bar{\xi}}(t) = A_c \bar{\xi}(t) + D_c(x(t_k) - x(t)) + G_c(z(t_k) - z(t)) + F_c(v(t_k) - v(t)). \quad (2.7)$$

关于系统 (2.7), 有如下两个命题成立, 其证明详见第 3 节.

命题 2.1 令 $V(\bar{\xi}) = \bar{\xi}^T P \bar{\xi}$. 那么, 沿着系统 (2.7) 的轨线, 有

$$\dot{V}(\bar{\xi}(t)) \leq -\frac{1 + \mu h_0}{2} \|\bar{\xi}(t)\|^2 + \mu \|\bar{\xi}(t)\| \sup_{\tau \in [t_k, t)} \|\bar{\xi}(\tau)\| (t - t_k) + \theta_0 (t - t_k)^2, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (2.8)$$

其中 μ 已由 (2.5) 式给出, 且 θ_0 是一个未知的正常数.

命题 2.2 由于 $h_0 \mu < 1$, 那么存在一个未知的正常数 θ_1 使得

$$\sup_{\tau \in [t_k, t_{k+1})} \|\bar{\xi}(\tau)\| \leq \|\bar{\xi}(t_0)\| + \theta_1, \quad k = 0, 1, \dots$$

下面给出关于自适应输出调节的定理.

定理 2.1 对满足假设 2.1 和 2.2 的系统 (2.1) 和外部系统 (2.2), 控制器 (2.3) 及变采样周期 h_k (由切换逻辑 1 决定) 确保对任意初始值 $(x_0, v_0, z_0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^{p_l}$, 闭环系统的所有信号 (即, x, z 和 u) 在 $[t_0, +\infty)$ 上有定义且有界, 并且存在某个整数 \bar{k} 使得对任意的 $t \geq t_0 + \sum_{i=0}^{\bar{k}} h_i$ 有 $\|e(t)\| < \varepsilon$, 同时对任意的 $k \geq \bar{k}$ 有 $h_k = h_{\bar{k}}$.

证 如 2.2 节所述, 对任意的初始值, 由式 (2.1), (2.2) 和 (2.3) 组成的闭环系统在 $[t_0, +\infty)$ 上有唯一解 $(x(t), v(t), z(t))$.

下面证明闭环系统信号 $(x(t), z(t), u(t))$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上有界 (无论切换是否发生有限次). 通过命题 2.1 和 2.2, 并注意到 $h_k \leq h_0$, 那么

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\xi}(t)) &\leq -\frac{1 + \mu h_0}{2} \|\bar{\xi}(t)\|^2 + \mu \|\bar{\xi}(t)\| (\|\bar{\xi}(t_0)\| + \theta_1) h_k + \theta_0 h_k^2 \\ &\leq -\frac{1}{2} \|\bar{\xi}(t)\|^2 + \theta h_k^2 \\ &\leq -\frac{1}{2\lambda_{\max}(P)} V(\bar{\xi}(t)) + \theta h_0^2, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中 $\lambda_{\max}(P)$ 为 P 的最大特征值, $\theta = \frac{2\mu(\|\bar{\xi}(t_0)\| + \theta_1)^2}{h_0} + \theta_0$ 是一个未知的正常数.

从 (2.9) 式可得

$$\begin{aligned} V(\bar{\xi}(t)) &\leq V(\bar{\xi}(t_0)) \exp\left(-\frac{1}{2\lambda_{\max}(P)}(t - t_0)\right) + \theta h_0^2 \int_{t_0}^t \exp\left(\frac{1}{2\lambda_{\max}(P)}(\tau - t)\right) d\tau \\ &\leq V(\bar{\xi}(t_0)) + 2\theta h_0^2 \lambda_{\max}(P), \quad \forall t \in [t_0, +\infty), \end{aligned}$$

然后, 结合 $V(\bar{\xi})$ 的定义, $v(t)$ 的有界性以及 $\xi = \bar{\xi} + X_c v$, 可知 $\xi(t) = [x^T(t), z^T(t)]^T$ 和 $u(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上有界.

接下来, 通过反证法证明采样周期的确发生有限次切换, 然后结合切换逻辑 1 可以直接得出对于预先给定的最终精度 ε , 存在某个常数 \bar{k} , 使得对任意的 $t \geq t_0 + \sum_{i=0}^{\bar{k}} h_i$ 有 $\|e(t)\| < \varepsilon$.

假设切换发生无限次, 即对于任意的 $t' \geq t_0$, 只要 $t > t'$ 就有 $\|e(t)\| \geq \varepsilon$. 那么, $\lim_{k \rightarrow +\infty} h_k = 0$, 这意味着存在某个 k' 使得

$$\theta h_k^2 \leq \frac{\varepsilon^2 \lambda_{\min}(P)}{4(\|C_c\| + 1)^2 \lambda_{\max}(P)}, \quad \forall k \geq k',$$

其中 $\lambda_{\min}(P)$ 为 P 的最小特征值. 然后, 由 (2.9) 式可得

$$\dot{V}(\bar{\xi}(t)) \leq -\frac{1}{2\lambda_{\max}(P)}V(\bar{\xi}(t)) + \frac{\varepsilon^2\lambda_{\min}(P)}{4(\|C_c\| + 1)^2\lambda_{\max}(P)}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall k \geq k',$$

这说明

$$\begin{aligned} V(\bar{\xi}(t)) &\leq V(\bar{\xi}(t_{k'})) \exp\left(-\frac{1}{2\lambda_{\max}(P)}(t - t_{k'})\right) + \frac{\varepsilon^2\lambda_{\min}(P)}{4(\|C_c\| + 1)^2\lambda_{\max}(P)} \\ &\quad \cdot \int_{t_{k'}}^t \exp\left(\frac{1}{2\lambda_{\max}(P)}(\tau - t)\right) d\tau \\ &\leq V(\bar{\xi}(t_{k'})) \exp\left(-\frac{1}{2\lambda_{\max}(P)}(t - t_{k'})\right) + \frac{\varepsilon^2\lambda_{\min}(P)}{2(\|C_c\| + 1)^2}, \quad \forall t \geq t_{k'}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

令 $\bar{t} = t_{k'} + 2\lambda_{\max}(P)\ln\left(\frac{2V(\bar{\xi}(t_{k'})) + \lambda_{\min}(P)(\frac{\varepsilon}{\|C_c\| + 1})^2}{\lambda_{\min}(P)(\frac{\varepsilon}{\|C_c\| + 1})^2}\right)$. 那么, 通过 (2.10) 式可推出

$$V(\bar{\xi}(t)) < \lambda_{\min}(P)\left(\frac{\varepsilon}{\|C_c\| + 1}\right)^2, \quad \forall t \geq \bar{t},$$

进一步, 由 $V(\bar{\xi})$ 的定义可得

$$\|\bar{\xi}(t)\| < \frac{\varepsilon}{\|C_c\| + 1}, \quad \forall t \geq \bar{t}. \quad (2.11)$$

注意到 $e = [C, 0]\xi + Fv$, $[C, 0]X_c + F = C_cX_c + F = 0$ (从 (2.4) 式得出) 和 $\bar{\xi} = \xi - X_c v$, 那么

$$e = [C, 0]\xi + Fv = C_c\bar{\xi} + C_cX_c v + Fv = C_c\bar{\xi},$$

再结合 (2.11) 式得到对任意的 $t \geq \bar{t}$, 有 $\|e(t)\| < \varepsilon$. 这显然与上述假设矛盾.

3 命题证明

命题 2.1 的证明 将在任意固定区间 $[t_k, t_{k+1})$ 上进行该命题的证明. 通过 (2.7) 式和 $A_c^T P + PA_c \leq -I_{n+pl}$ (见切换逻辑 1), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\xi}(t)) &= \bar{\xi}^T(t)(A_c^T P + PA_c)\bar{\xi}(t) + 2\bar{\xi}^T(t)PD_c(x(t_k) - x(t)) + 2\bar{\xi}^T(t)PG_c(z(t_k) - z(t)) \\ &\quad + 2\bar{\xi}^T(t)PF_c(v(t_k) - v(t)) \\ &\leq -\|\bar{\xi}(t)\|^2 + 2\|\bar{\xi}(t)\| \cdot \|PD_c\| \cdot \|x(t_k) - x(t)\| + 2\|\bar{\xi}(t)\| \cdot \|PG_c\| \cdot \|z(t_k) - z(t)\| \\ &\quad + 2\|\bar{\xi}(t)\| \cdot \|PF_c\| \cdot \|v(t_k) - v(t)\|. \end{aligned} \quad (3.1)$$

下面给出 (3.1) 式右边最后三项的恰当估计.

把 (2.3) 式中第一个等式代入 (2.1) 可知

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BK_1 z(t_k) + BK_2 x(t_k) + Ev(t),$$

基于此并注意到 $\bar{\xi}$ 的定义有

$$\begin{aligned} \|\dot{x}(t)\| &\leq \|A\| \cdot \|x(t)\| + \|BK_1\| \cdot \|z(t_k)\| + \|BK_2\| \cdot \|x(t_k)\| + \|E\| \cdot \|v(t)\| \\ &\leq \|A\| \cdot \|\bar{\xi}(t)\| + \|A\| \cdot \|X_c\| \cdot \|v(t)\| + \|BK_1\| \cdot \|\bar{\xi}(t_k)\| + \|BK_1\| \cdot \|X_c\| \cdot \|v(t_k)\| \\ &\quad + \|BK_2\| \cdot \|\bar{\xi}(t_k)\| + \|BK_2\| \cdot \|X_c\| \cdot \|v(t_k)\| + \|E\| \cdot \|v(t)\| \\ &\leq c_0 \sup_{\tau \in [t_k, t)} \|\bar{\xi}(\tau)\| + \theta_2, \end{aligned}$$

其中 $c_0 = \|A\| + \|BK_1\| + \|BK_2\|$, $\theta_2 = (\|A\| \cdot \|X_c\| + \|E\| + \|BK_1\| \cdot \|X_c\| + \|BK_2\| \cdot \|X_c\|) \cdot \sup_{t \geq t_0} \|v(t)\|$. 进而,

$$\|x(t_k) - x(t)\| \leq \int_{t_k}^t \|\dot{x}(\tau)\| d\tau \leq c_0 \sup_{\tau \in [t_k, t]} \|\bar{\xi}(\tau)\| (t - t_k) + \theta_2 (t - t_k).$$

那么, 通过完全平方公式, (3.1) 式右边第二项估计如下

$$\begin{aligned} & 2\|\bar{\xi}(t)\| \cdot \|PD_c\| \cdot \|x(t_k) - x(t)\| \\ & \leq 2\|\bar{\xi}(t)\| \cdot \|PD_c\| \cdot \left(c_0 \sup_{\tau \in [t_k, t]} \|\bar{\xi}(\tau)\| (t - t_k) + \theta_2 (t - t_k) \right) \\ & \leq 2c_0 \|PD_c\| \cdot \|\bar{\xi}(t)\| \sup_{\tau \in [t_k, t]} \|\bar{\xi}(\tau)\| (t - t_k) + \frac{1 - \mu h_0}{6} \|\bar{\xi}(t)\|^2 + \frac{6\theta_2^2 \|PD_c\|^2}{1 - \mu h_0} (t - t_k)^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

将 (2.6) 式中第二个等式代入 (2.3) 式, 并注意到 $\bar{\xi}$ 的定义以及 (2.4) 式中第二个等式, 那么

$$\dot{z}(t) = G_1 z(t) + G_2 C_c \xi(t_k) + G_2 F v(t_k) = G_1 z(t) + G_2 C_c \bar{\xi}(t_k).$$

因此, 有

$$\begin{aligned} \|\dot{z}(t)\| & \leq \|G_1\| \cdot \|z(t)\| + \|G_2 C_c\| \cdot \|\bar{\xi}(t_k)\| \\ & \leq \|G_1\| \cdot \|\bar{\xi}(t)\| + \|G_1\| \cdot \|X_c\| \cdot \|v(t)\| + \|G_2 C_c\| \cdot \|\bar{\xi}(t_k)\| \\ & \leq c_1 \sup_{\tau \in [t_k, t]} \|\bar{\xi}(\tau)\| + \theta_3, \end{aligned}$$

其中 $c_1 = \|G_1\| + \|G_2 C_c\|$, $\theta_3 = \|G_1\| \cdot \|X_c\| \cdot \sup_{t \geq t_0} \|v(t)\|$. 进而,

$$\|z(t_k) - z(t)\| \leq \int_{t_k}^t \|\dot{z}(\tau)\| d\tau \leq c_1 \sup_{\tau \in [t_k, t]} \|\bar{\xi}(\tau)\| (t - t_k) + \theta_3 (t - t_k),$$

然后利用完全平方公式, 可得

$$\begin{aligned} & 2\|\bar{\xi}(t)\| \cdot \|PG_c\| \cdot \|z(t_k) - z(t)\| \\ & \leq 2\|\bar{\xi}(t)\| \cdot \|PG_c\| \cdot \left(c_1 \sup_{\tau \in [t_k, t]} \|\bar{\xi}(\tau)\| (t - t_k) + \theta_3 (t - t_k) \right) \\ & \leq 2c_1 \|PG_c\| \cdot \|\bar{\xi}(t)\| \sup_{\tau \in [t_k, t]} \|\bar{\xi}(\tau)\| (t - t_k) + \frac{1 - \mu h_0}{6} \|\bar{\xi}(t)\|^2 + \frac{6\theta_3^2 \|PG_c\|^2}{1 - \mu h_0} (t - t_k)^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

由 (2.3) 式中第二个等式, (3.1) 式右边第四项可估计为

$$\begin{aligned} 2\|\bar{\xi}(t)\| \cdot \|PF_c\| \cdot \|v(t_k) - v(t)\| & \leq 2\|\bar{\xi}(t)\| \cdot \|PF_c\| \cdot \int_{t_k}^t \|\dot{v}(\tau)\| d\tau \\ & \leq 2\|\bar{\xi}(t)\| \cdot \|PF_c\| \cdot \sup_{t \geq t_0} \|v(t)\| (t - t_k) \\ & \leq \frac{1 - \mu h_0}{6} \|\bar{\xi}(t)\|^2 + \frac{6\theta_4^2 \|PF_c\|^2}{1 - \mu h_0} (t - t_k)^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中 $\theta_4 = \sup_{t \geq t_0} \|v(t)\|$.

把式 (3.2), (3.3) 和 (3.4) 代入 (3.1) 式可直接得出 (2.8) 式, 其中 $\theta_0 = \frac{6}{1 - \mu h_0} (\theta_2^2 \|PD_c\|^2 + \theta_3^2 \|PG_c\|^2 + \theta_4^2 \|PF_c\|^2)$.

命题 2.2 证明 只需证明当 $\theta_1 = h_0 \sqrt{\frac{2\theta_0}{1 - \mu h_0}} + 1$ 时命题 2.2 成立即可, 其中 μ 和 θ_0 已在命题 2.1 给出.

利用反证法. 假设存在 k_1 使得 $\sup_{\tau \in [t_{k_1}, t_{k_1+1})} \|\bar{\xi}(\tau)\| > \|\xi(t_0)\| + \theta_1$, 那么存在 $t' \in [t_{k_1}, t_{k_1+1})$ 满足 $\bar{\xi}(t') > \|\xi(t_0)\| + \theta_1$. 然后, 可以选出 $k_2 \leq k_1$ 和 $t'' \in (t_{k_2}, t_{k_2+1})$ 满足

$$\begin{cases} \|\bar{\xi}(t'')\| > \|\bar{\xi}(t_0)\| + h_0 \sqrt{\frac{2\theta_0}{1-\mu h_0}} + 1, \\ \|\bar{\xi}(t_{k_2})\| \leq \|\bar{\xi}(t_0)\| + h_0 \sqrt{\frac{2\theta_0}{1-\mu h_0}} + 1. \end{cases}$$

进一步, 由 $\bar{\xi}(t)$ 在 $[t_{k_2}, t'']$ 上的连续可微性, 可知存在 $t''' \in [t_{k_2}, t'']$ 使得

$$\begin{cases} \|\bar{\xi}(t''')\| = \|\bar{\xi}(t_0)\| + h_0 \sqrt{\frac{2\theta_0}{1-\mu h_0}} + 1, \\ \dot{V}(\bar{\xi}(t''')) \geq 0, \\ \|\bar{\xi}(t)\| \leq \|\bar{\xi}(t''')\|, \quad \forall t \in [t_{k_2}, t'''], \end{cases} \quad (3.5)$$

然后结合 $h_{k_2} \leq h_0 < \frac{1}{\mu}$ 和 (2.8) 式, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\xi}(t''')) &\leq -\frac{1+\mu h_0}{2} \|\bar{\xi}(t''')\|^2 + \mu \|\bar{\xi}(t''')\| \sup_{\tau \in [t_{k_2}, t''')} \|\bar{\xi}(\tau)\| (t''' - t_{k_2}) + \theta_0 h_{k_2}^2 \\ &\leq -\frac{1+\mu h_0}{2} \|\bar{\xi}(t''')\|^2 + \mu h_0 \|\bar{\xi}(t''')\|^2 + \theta_0 h_0^2 \\ &= -\frac{1-\mu h_0}{2} \left(\|\bar{\xi}(t_0)\| + h_0 \sqrt{\frac{2\theta_0}{1-\mu h_0}} + 1 \right)^2 + \theta_0 h_0^2 < 0, \end{aligned}$$

这与 (3.5) 式中第二个不等式矛盾, 因此命题 2.2 得证.

4 仿真算例

为了验证理论结果的有效性, 考虑系统 (2.1) 的采样输出调节并取

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1, 0], \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = [1, 1, 1]$$

以及

$$A_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

显然假设 2.1 和 2.2 成立, 且 A_v 是中立稳定的.

令 $\varepsilon = 0.1$ 为预先设定的最终精度. 设计形如 (2.3) 式的变周期采样控制器, 其中

$$K_1 = [-1, 4, -5], \quad K_2 = [-9, -5], \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

初始的采样周期 $h_0 = 0.0008$, 序列 $H = \left\{ \frac{6.4}{7999+k}, k = 1, 2, \dots \right\}$ 且

$$P = \begin{bmatrix} 1.6719 & -0.5000 & 0 & 1.2734 & -1.0000 \\ -0.5000 & 2.4531 & -1.2734 & 1.0000 & -0.3984 \\ 0 & -1.2734 & 22.6914 & -0.5000 & -3.4648 \\ 1.2734 & 1.0000 & -0.5000 & 3.4648 & -0.5000 \\ -1.0000 & -0.3984 & -3.4648 & -0.5000 & 2.1914 \end{bmatrix}.$$

令初始值为 $x(0) = [0.5, 1]^T$, $z(0) = [0.8, 0, 1]^T$ 和 $v(0) = [0.8, -1, 1.5]^T$. 图 1-5 呈现了闭环系统所有信号的轨迹. 具体地, 从图中可看出所有信号有界, 图 3 说明调节输出 $e(t)$ 最终收敛到预先设定的零点的邻域, 从图 5 可以看出采样周期约 11.74 秒之后保持不变, 说明其切换了有限次.

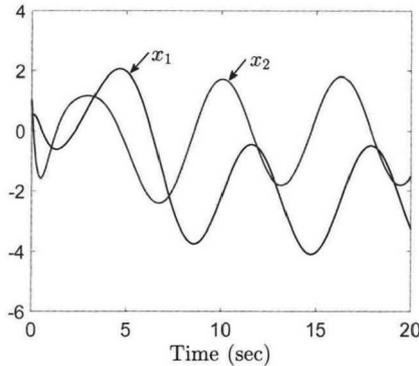


图 1 系统状态 x 的轨迹

(Figure 1 The trajectories of the system state x)

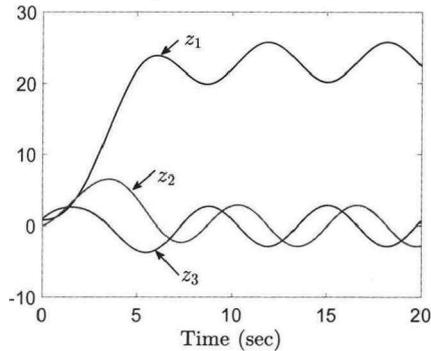


图 2 内部状态 z 的轨迹

(Figure 2 The trajectories of the internal state z)

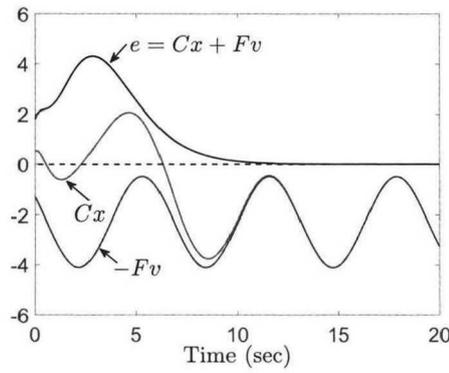


图 3 调节输出 e 的轨迹

(Figure 3 The trajectory of the regulated output e)

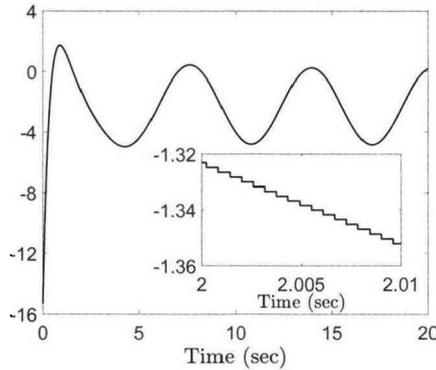


图 4 系统输入 u 的轨迹

(Figure 4 The trajectory of the system input u)

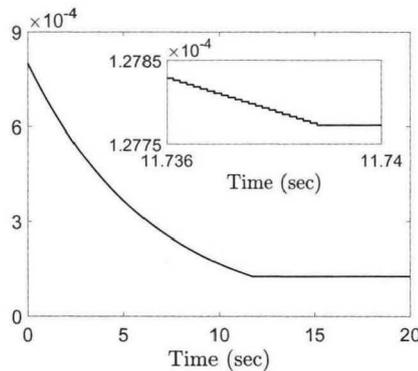


图 5 采样周期 h 的调节

(Figure 5 The adjustment of the sampling periods h)

5 结论

针对输出调节问题, 本文提出了一个新型的变周期采样控制策略. 为了补偿加性干扰, 不仅融合了基于内模原理的动态补偿器, 而且引入了变采样周期切换调节机制. 然而, 所研

究系统中的矩阵均精确已知, 因此亟需发展具有更强鲁棒性的自适应采样策略来解决系统矩阵未知的情形.

参 考 文 献

- [1] Åström K J, Wittenmark B. Computer-Controlled Systems: Theory and Design (Third Edition). New Jersey: Prentice Hall, 1997.
- [2] Chen T W, Francis B. Optimal Sampled-Data Control Systems New York: Springer-Verlag, 1995.
- [3] Heemels W, Johansson K H, Tabuada P. Event-Triggered and Self-Triggered Control in Encyclopedia of Systems and Control, London: Springer, 2014, 384–391.
- [4] Mareels I M Y, Penfold H B, Evans R J. Controlling nonlinear time-varying systems via Euler approximations. *Automatica*, 1992, **28**(4): 681–696.
- [5] Owens D H. Adaptive stabilization using a variable sampling rate. *International Journal of Control*, 1996, **63**(1): 107–119.
- [6] Clarke F H, Ledyev Y S, Sontag E D, et al. Asymptotic controllability implies feedback stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(10): 1394–1407.
- [7] Nešić D, Teel A R, Kokotović P V. Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations. *Systems & Control Letters*, 1999, **38**(4): 259–270.
- [8] Dabroom A M, Khalil H K. Output feedback sampled-data control of nonlinear systems using high-gain observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(11): 1712–1725.
- [9] Nešić D, Teel A R. A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(7): 1103–1122.
- [10] Ilchmann A, Ke Z Q, Logemann H. Indirect sampled-data control with sampling period adaptation. *International Journal of Control*, 2011, **84**(2): 424–431.
- [11] Qian C J, Du H B. Global output feedback stabilization of a class of nonlinear systems via linear sampled-data control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(11): 2934–2939.
- [12] Ilchmann A, Townley S. Adaptive high-gain λ -tracking with variable sampling rate. *Systems & Control Letters*, 1999, **36**(4): 285–293.
- [13] Nešić D, Laila D S. A note on input-to-state stabilization for nonlinear sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(7): 1153–1158.
- [14] Laila D S, Astolfi A. Input-to-state stability for discrete-time time-varying systems with applications to robust stabilization of systems in power form. *Automatica*, 2005, **41**(11): 1891–1903.
- [15] Postoyan R, Ahmed-Alib T, Lamnabhi-Lagarigue F. Robust backstepping for the Euler approximate model of sampled-data strict-feedback systems. *Automatica*, 2009, **45**(9): 2164–2168.
- [16] Mazo M, Anta A, Tabuada P. An ISS self-triggered implementation of linear controllers. *Automatica*, 2010, **46**(8): 1310–1314.
- [17] Heemels W, Donkers M C F, Teel A R. Periodic event-triggered control for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(4): 847–861.

-
- [18] Almeida J, Silvestre C, Pascoal A M. Self-triggered state-feedback control of linear plants under bounded disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, **25**(8): 1230–1246.
- [19] Abdelrahim M, Postoyan R, Daafouz J, et al. Robust event-triggered output feedback controllers for nonlinear systems. *Automatica*, 2017, **75**: 96–108.
- [20] Liu W, Huang J. Event-triggered global robust output regulation for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(11): 5923–5930.
- [21] Man Y C, Liu Y G. A powerful output-feedback controller for uncertain nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, **28**(6): 2264–2275.
- [22] Wang M Q, Liu Y G, Man Y C. Global output-feedback stabilization for nonlinear systems with unknown relative degree. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, **28**(4): 1425–1439.
- [23] Castillo B, Di Gennaro S, Monaco S, et al. On regulation under sampling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(6): 864–868.
- [24] Huang Y X, Liu Y G. A variable-period scheme for dynamic sampled-data stabilization. *SCIENCE CHINA Information Science*, DOI: 10.1007/s11432-018-9679-1.
- [25] Huang J. *Nonlinear Output Regulation: Theory and Applications*. Pennsylvania: SIAM, 2004.